Es geht weiter auf S. 24

Verwaltungs- und Wirtschafts- Akademie Potsdam e. V.
Dipl.-Kfm. Thomas Rochow

09.12.2024

Anmerkungen zur Finanzmathematik

- **Übersicht über die verwendete Notation**

K_0 :	Anfangswert, Startwert, Barwert
K_n :	Zeitwert, Endwert
n :	Verzinsungsdauer (zumeist in Jahren)
p :	Zinsfuß
$q = 1 + \frac{p}{100}$:	Aufzinsungsfaktor
$\frac{1}{q} = \frac{1}{1+\frac{p}{100}}$:	Abzinsungsfaktor
k :	laufende Einzahlung $(k > 0)$, laufende Auszahlung $(k < 0)$
m :	Anzahl der Perioden innerhalb einer Periode

Tilgungsrechnung

Modell:

Arten der Tilgung:

Darstellungsinstrument:

Vollständiger Tilgungsplan,
eine Tabelle, aus der für jede Periode die mitgeführte Restschuld sowie die Zins-, die Tilgungs- und die Gesamtzahlung hervorgehen.

Jahr	Restschuld	Zins auf Restschuld	Tilgung	Gesamt-zahlung
1				
2				

Datenlage:

Aufgaben

12. € 20 000,– sind bei einem Zinssatz von 7% p. a. in vier Jahren zu tilgen.
    a) Stellen Sie einen vollständigen Tilgungsplan unter Zugrundelegung konstanter Tilgungsbeträge auf.
    b) Stellen Sie einen vollständigen Tilgungsplan unter Zugrundelegung konstanter Annuitäten auf.
    c) Beurteilen und vergleichen Sie beide Vorgehensweisen.

13. Ein Kredit in Höhe von € 50 000,– (am Jahresbeginn) soll durch jährliche Zahlungen jeweils am Jahresende über 30 Jahre getilgt werden. Der Zinssatz beträgt 9% p. a.. Von den 30 Zahlungen erfolgen die ersten 29 Zahlungen in Höhe von A, die dreißigste Zahlung soll jedoch nur halb so hoch sein. Bestimmen Sie den Wert von A.

Projektaufgaben

Aufgabe 4) **Nochmals vollständige Tilgungspläne - (Tilgungsfreie Jahre)**

Sie haben einen Kredit aufgenommen in Höhe von € 6 000,– , dessen Gesamtlaufzeit sechs Jahre beträgt, von denen die ersten zwei allerdings tilgungsfrei bleiben sollen. Der Zinssatz betrage 6,25% p. a.

Stellen Sie vollständige Tilgungspläne auf:

a) für den Fall konstanter Tilgungsbeträge
b) für den Fall konstanter Annuitäten.

Zusatzaufgaben Finanzmathematik

Aufgabe 5

Tilgung zu konstanten Annuitäten
Kreditbetrag: € 10.000.000,--
Laufzeit: 40 Jahre
Zinsfuß: 11% p. a.

1. Berechnen Sie den Tilgungsbetrag des 32. Jahres T_{32}!
2. Berechnen Sie den Zinsbetrag des 20. Jahres Z_{20}!
3. Restschuld nach 35 Jahren K_{35}! Geben Sie mindestens zwei Lösungswege an!

Aufgabe 12
€ 20 000,– sind bei einem Zinssatz von 7% p. a. in vier Jahren zu tilgen.

Erweiterung: Löse als endfälliges Darlehen

Zugehöriger vollständiger Tilgungsplan:

Jahr	Restschuld	Zins auf Restschuld	Tilgung	Gesamt-zahlung

Aufgabe 12
€ 20 000,– sind bei einem Zinssatz von 7% p. a. in vier Jahren zu tilgen.

1. **Löse bei konstanten Tilgungsbeträgen**

Zugehöriger vollständiger Tilgungsplan:

Jahr	Restschuld	Zins auf Restschuld	Tilgung	Gesamt-zahlung

Aufgabe 12
€ 20 000,– sind bei einem Zinssatz von 7% p. a. in vier Jahren zu tilgen.

2. **Löse bei (konstanten) Annuitäten**

Zugehöriger vollständiger Tilgungsplan:

Jahr	Restschuld	Zins auf Restschuld	Tilgung	Gesamt-zahlung Annuität

Aufgabe 12

neue Abwandlung

€ 20 000,— sind bei einem Zinssatz von 7% p. a. in sechs Jahren zu tilgen, wobei die ersten beiden Jahre tilgungsfrei bleiben sollen.

Löse bei konstanten Tilgungsbeträgen…

Zugehöriger vollständiger Tilgungsplan:

Jahr	Restschuld	Zins auf Restschuld	Tilgung	Gesamt-zahlung

Zusatzaufgaben Finanzmathematik

Aufgabe 5
Tilgung zu konstanten Annuitäten
Kreditbetrag: € 10.000.000,--
Laufzeit: 40 Jahre
Zinsfuß: 11% p. a.

1. Berechnen Sie den Tilgungsbetrag des 32. Jahres T_{32}!
2. Berechnen Sie den Zinsbetrag des 20. Jahres Z_{20}!
3. Restschuld nach 35 Jahren K_{35}! Geben Sie mindestens zwei Lösungswege an!

$$K_{35} = 10.000.000 \cdot 1,11^{35} - 1.117.187,27 \cdot \frac{1,11^{35} - 1}{1,11 - 1}$$

10000000 · 1,11 x^y 35 −

1117.187,27 x ((1,11 x^y 35 − 1) :

(1,11 − 1)) =

thomas.rehse@hotmail.de

Rentenrechnung spezial

Projektaufgaben

Aufgabe 5) **Ewige Rente**

a) A räumt dem B ein Wegerecht auf alle Zeiten ein. B muss dafür dem A auf unbegrenzte Zeit am Ende eines jeden Jahres € 1 000,– zahlen. Wie groß ist der Barwert der ewigen Rente, wenn beiden einen Zinssatz von p = 8 % p. a. zugrunde legen? Mit anderen Worten: Wie hoch ist der Betrag, durch dessen Zahlung der B seine Zahlungsverpflichtung sofort in voller Höhe abdecken könnte?

b) Welchen Betrag muss ein Kapital haben, wenn eine

   a) am Anfang
   b) am Ende

   eines jeden Jahres zahlbare ewige Rente in Höhe von € 100 000,– sichergestellt werden soll? Rechnen Sie mit einem Zinsfuß von 4,5% p. a.

Aufgabe 6) **Unterjährige Rentenzahlungen bei jährlicher Verzinsung**

a) Eine vorschüssige monatliche Rente beträgt € 2 000,– . Die jährliche Verzinsung liegt bei 6% und die Rentendauer beträgt 10 Jahre. Wie hoch ist der Rentenendwert?

b) Welcher Rentenendwert ergibt sich, wenn die monatliche Rente nachschüssig geleistet wird?

(Beispiel (erweitert) entstammt: HETTICH / JÜTTLER / LUDERER: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler und Finanzmathematik, 3. überarb. u. erw. Aufl., München, Wien 1996, S. 65.)

Zusatzaufgaben

Aufgabe 7

1. Eine vorschüssige quartalsweise Rente beträgt € 2 000,– . Die jährliche Verzinsung liegt bei 4% und die Rentendauer beträgt 8 Jahre. Wie hoch ist der Rentenendwert?
2. Welcher Rentenendwert ergibt sich, wenn die Rente halbjährlich, nachschüssig in Höhe von € 1.050,-- (bei gleicher Dauer und gleichem Zinsfuß) geleistet wird?

unterjährige Zahlungen bei jährlicher Verzinsung

Datenlage:

m: Anzahl der unterjährigen Perioden

monatlich	m = 12
halbjährlich	m = 2
alle 4 Monate	m = 3
quartalsweise	m = 4

täglich m = 360
12 Monate à 30 Tage

immer gegeben

m
k*: unterjähriger Zahlungsbetrag
ZW: nachschüssig / vorschüssig
p: auf das Jahr bezogener Zinsfuß
q: zugehöriger Aufzinsungsfaktor
n: Laufzeit

JS: Km

Vorgehensweise

Lösung in zwei Schritten:

1. Transformation der m-maligen unterjährigen Zahlung r^*

in einen einmaligen am Jahresende erfolgenden Betrag

⇓

Formelinstrumentarium:

- k_{nach}: wenn k^* nachschüssig gezahlt wurde.

$$\boxed{k_{nach} = k^* \cdot \left(m + \frac{m-1}{2} \cdot \frac{p}{100}\right)}$$

- k_{vor}: wenn k^* vorschüssig gezahlt wurde

$$\boxed{k_{vor} = k^* \left(m + \frac{m+1}{2} \cdot \frac{p}{100}\right)}$$

k_{vor} und k_{nach} wird nach–

Unterjährige Beträge

siehe Notizen Teil 2

Projektaufgaben

Aufgabe 6) **Unterjährige Rentenzahlungen bei jährlicher Verzinsung**

a) Eine vorschüssige monatliche Rente beträgt € 2 000,– . Die jährliche Verzinsung liegt bei 6% und die Rentendauer beträgt 10 Jahre. Wie hoch ist der Rentenendwert?

b) Welcher Rentenendwert ergibt sich, wenn die monatliche Rente nachschüssig geleistet wird?

(Beispiel (erweitert) entstammt: HETTICH / JÜTTLER / LUDERER: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler und Finanzmathematik, 3. überarb. u. erw. Aufl., München, Wien 1996, S. 65.)

a) geg.: $m = 12$ $\quad r^* = 2000$

EW vorschüssig

$p = 6$ $\quad q = 1{,}06$ $\quad n = 10$

ges.: K_{10} (über r_{vor})

Lsg.:

$$r_{vor} = r^* \cdot \left(m + \frac{m+1}{2} \cdot \frac{p}{100}\right)$$

$$K_n = r_{vor} \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$r_{vor} = 2000 \cdot \left(12 + \frac{12+1}{2} \cdot \frac{6}{100}\right) = \underline{\underline{24.780}}$$

$$K_{10} = 24.780 \cdot \frac{1{,}06^{10} - 1}{1{,}06 - 1} = \underline{\underline{326.620{,}10}}$$

Noch 10 Jahren verfügen wir über € 326.620,10.

weiter geht es 19:47 Uhr

b.) in den Notizen

k^*, m, ZW
n, p, q

Zusatzaufgaben
Aufgabe 7

1. Eine vorschüssige quartalsweise Rente beträgt € 2 000,— . Die jährliche Verzinsung liegt bei 4% und die Rentendauer beträgt 8 Jahre. Wie hoch ist der Rentenendwert?
2. Welcher Rentenendwert ergibt sich, wenn die Rente halbjährlich, nachschüssig in Höhe von € 1.050,-- (bei gleicher Dauer und gleichem Zinsfuß) geleistet wird?

K

1) Geg.: $k^* = 2000$ $m = 4$ ZW vorschüssig

$n = 8$ $p = 4$ $q = 1{,}04$

Ges.: K_8 (über k_{vor})

Lös.:
$$k_{vor} = k^*\left(m + \frac{m+1}{2} \cdot \frac{p}{100}\right)$$

$$k_{vor} = 2000\left(4 + \frac{4+1}{2} \cdot \frac{4}{100}\right) = \underline{\underline{8.200}}$$

$$K_n = k_{vor} \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$K_8 = 8200 \frac{1{,}04^8 - 1}{1{,}04 - 1} = \underline{\underline{75.556{,}66}}$$

Satz ..

!!!

2.) geg.: $m = 2$ $\quad r^* = 1{,}050$ $\quad$ · ZW: nach-schüssig

$$n = 8 \qquad p = 4 \qquad q = 1{,}04$$

ges.: K_8 (über r_{mod})

Lös.: $r_{mod} = r^* \cdot \left(m + \frac{m-1}{2} \cdot \frac{p}{100}\right)$

$$r_{mod} = 1.050 \cdot \left(2 + \frac{2-1}{2} \cdot \frac{4}{100}\right) = \underline{\underline{2121}}$$

$$K_n = r_{mod} \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$K_8 = 2121 \cdot \frac{1{,}04^8 - 1}{1{,}04 - 1} = \underline{\underline{19.543{,}37}}$$

thomas.rochow@
hotmail.de
0173 1757453

nur zu!

ewige Rente:

Formeln können auch fein, klein sein …

$n \to \infty$

Frage nach K_n scheidet deswegen aus!

$\Rightarrow$ Daher Frage nach K_0:

Welcher jetzige Betrag K_0 finanziert uns die gewünschte ewige Rente i.H.v. R?

Bsp.: Stiftungen, bei denen nur die Zinsbeträge zur Auszahlung gelangen:

Datenlage:

ZW nachschüssig / vorschüssig

R: Höhe der ewigen Rente

p: Zinsfuß, Zinssatz

q = Aufzinsungsfaktor

$\left(q = 1 + \frac{p}{100} \right)$

Formelinstrumentarium:

nachschüssig

$$K_0 = \frac{r}{q-1}$$

vorschüssig

$$K_0 = \frac{r\,q}{q-1}$$

Aufgabe 5) **Ewige Rente**

a) A räumt dem B ein Wegerecht auf alle Zeiten ein. B muss dafür dem A auf unbegrenzte Zeit am Ende eines jeden Jahres € 1 000,– zahlen. Wie groß ist der Barwert der ewigen Rente, wenn beiden einen Zinssatz von p = 8 % p. a. zugrunde legen? Mit anderen Worten: Wie hoch ist der Betrag, durch dessen Zahlung der B seine Zahlungsverpflichtung sofort in voller Höhe abdecken könnte?

HA

b) Welchen Betrag muss ein Kapital haben, wenn eine

   a) am Anfang
   b) am Ende

   eines jeden Jahres zahlbare ewige Rente in Höhe von € 100 000,– sichergestellt werden soll? Rechnen Sie mit einem Zinsfuß von 4,5% p. a.

ZW; k; p, q

b a) Geg.: ZW: vorschüssig, $p = 4{,}5$

$k = 100.000$ $q = 1{,}045$

Ges.: K_0

Lös.: $K_0 = \frac{k \cdot q}{q-1}$

$$K_0 = \frac{100.000 \cdot 1{,}045}{1{,}045 - 1} = \underline{\underline{2.322.222{,}22}}$$

€ 2.322.222,22 finanzieren bei 4,5%
Jahreszins wie ewige vorschüssige
Rente i.H.v. € 100.000,– .

2.322.222,22
− 100.000,–
= 2.222.222,22
100.000,–
2.322.222,22

x 0,045

bb) wie oben, oder nachschüssig:

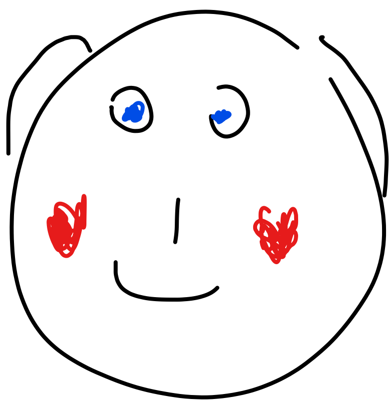
$$K_0 = \frac{r}{q-1}$$

$$K_0 = \frac{100.000}{1{,}045-1} = \underline{\underline{2.222.222{,}22}}$$

~~**Platz für Notizen**~~

Satz analog oben

Kapital zu Beginn	2.222.222,22 €
+ Zinsen	+ 100.000,—
− Rente	− 100.000,—
Kapital am Ende	= 2.222.222,22



eine gute und schöne Adventszeit!!!...