Verwaltungs- und Wirtschafts- Akademie Potsdam e. V.
Dipl.-Kfm. Thomas Rochow

Anmerkungen zur Finanzmathematik

- **<u>Übersicht über die verwendete Notation</u>**

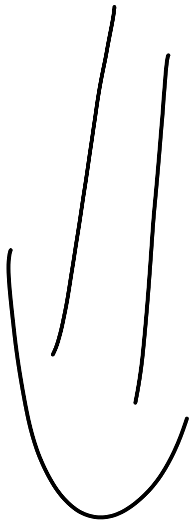
K_0 :	Anfangswert, Startwert, Barwert
K_n :	Zeitwert, Endwert
n :	Verzinsungsdauer (zumeist in Jahren)
p :	Zinsfuß
$q = 1 + \frac{p}{100}$:	Aufzinsungsfaktor
$\frac{1}{q} = \frac{1}{1 + \frac{p}{100}}$:	Abzinsungsfaktor
k :	laufende Einzahlung $(k > 0)$, laufende Auszahlung $(k < 0)$
m :	Anzahl der Perioden innerhalb einer Periode

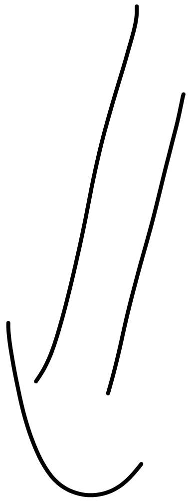
Tilgungsrechnung Rückzahlung von Krediten ...

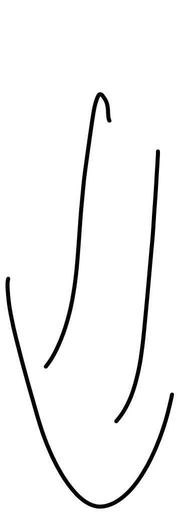
Modell:

- Eine Schuld, ein aufgenommener Kredit wird getilgt (zurückgezahlt) und verzinst..
- Alle Zahlungen erfolgen jeweils am Periodenende.

  Zins- und Tilgungszahlung
- Zinsen werden jeweils auf die mitgeführte Restschuld entrichtet.







Arten der Tilgung:

1) Tilgung in einem Betrag am Ende der Laufzeit (endfälliges Darlehen)

2) Tilgung in Teilbeträgen durch

a) durch konstante Tilgungsbeträge (T-Beträgen)

b) durch Annuitäten (A)

→ ist ein konstanter Betrag, der sich ab

Summe aus Zinszahlung
und T- Zahlungen gibt

c) Spezialfälle, Mischfälle

Darstellungsinstrument:

Vollständiger Tilgungsplan,
eine Tabelle, aus der für jede Periode die mitgeführte Restschuld sowie die Zins-, die Tilgungs- und die Gesamtzahlung hervorgehen.

Annuität

Jahr	Restschuld	Zins auf Restschuld	Tilgung	Gesamt-zahlung
1				
2				

Datenlage:

K_0 : Kreditbetrag, zu tilgende Schuld ...

n : Laufzeit

p : Zinsfuß, Zinssatz

$$\boxed{q = 1 + \frac{p}{100}}$$

q : zugehöriger Aufzinsungsfaktor

K_{n^*} : Restschuld nach n^* Jahren ;
nach n^* Jahren noch zu tilgende Schuld.

Aufgaben

wird erweitert

K

12. € 20 000,– sind bei einem Zinssatz von 7% p. a. in vier Jahren zu tilgen.

Standard

   a) Stellen Sie einen vollständigen Tilgungsplan unter Zugrundelegung konstanter Tilgungsbeträge auf.
   b) Stellen Sie einen vollständigen Tilgungsplan unter Zugrundelegung konstanter Annuitäten auf.
   c) Beurteilen und vergleichen Sie beide Vorgehensweisen.

13. Ein Kredit in Höhe von € 50 000,– (am Jahresbeginn) soll durch jährliche Zahlungen jeweils am Jahresende über 30 Jahre getilgt werden. Der Zinssatz beträgt 9% p. a.. Von den 30 Zahlungen erfolgen die ersten 29 Zahlungen in Höhe von A, die dreißigste Zahlung soll jedoch nur halb so hoch sein. Bestimmen Sie den Wert von A.

Projektaufgaben

Aufgabe 4) **Nochmals vollständige Tilgungspläne - (Tilgungsfreie Jahre)**

Sie haben einen Kredit aufgenommen in Höhe von € 6 000,– , dessen Gesamtlaufzeit sechs Jahre beträgt, von denen die ersten zwei allerdings tilgungsfrei bleiben sollen. Der Zinssatz betrage 6,25% p. a.

Stellen Sie vollständige Tilgungspläne auf:

a) für den Fall konstanter Tilgungsbeträge
b) für den Fall konstanter Annuitäten.

Zusatzaufgaben Finanzmathematik

Aufgabe 5
Tilgung zu ~~konstanten~~ Annuitäten
Kreditbetrag: € 10.000.000,--
Laufzeit: 40 Jahre
Zinsfuß: 11% p. a.

1. Berechnen Sie den Tilgungsbetrag des 32. Jahres T_{32}!
2. Berechnen Sie den Zinsbetrag des 20. Jahres Z_{20}!
3. Restschuld nach 35 Jahren K_{35}! ~~Geben Sie mindestens zwei Lösungswege an!~~

K

Aufgabe 12
€ 20 000,– sind bei einem Zinssatz von 7% p. a. in vier Jahren zu tilgen.

1. **Erweiterung: Löse als endfälliges Darlehen**

- Beim endfälligen Darlehen erfolgt die komplette Tilgung in der letzten Periode.
- Zinsen werden aber in jeder Periode entrichtet.

Geg.:

$K_0 = 20000 \qquad n = 4$

$p = 7 \quad (q = 1{,}07)$

Zugehöriger vollständiger Tilgungsplan:

Jahr	Restschuld	Zins auf Restschuld	Tilgung	Gesamtzahlung
1	20.000	$\cdot \frac{7}{100}$ 1400 (1)	–	1.400 (2)
2	20000 (3)	1400	–	1400
3	20.000	1.400	–	1.400
4	$\boxed{20.000}$	1.400	$\boxed{20.000}$	21.400

(1) $z_1 = K_0 \cdot \frac{p}{100}$ hier: $z_1 = 20.000 \cdot \frac{7}{100} = 1.400$

allg.: $\boxed{z_{n^*} = K_{n^*-1} \cdot \frac{p}{100}}$

(2) $G_1 = z_1 + T_1$ hier: $G_1 = 1400 + 0 = 1400$

$\boxed{\text{allg.: } G_{n^*} = z_{n^*} + T_{n^*}}$

(3) !!! neue Restschuld (RS)?

neue RS = alte RS − aktuelle Tilgung

!!! nur T-Zahlungen reduzieren die Restschuld

Aufgabe 12
€ 20 000,– sind bei einem Zinssatz von 7% p. a. in vier Jahren zu tilgen.

1. Löse bei konstanten Tilgungsbeträgen

geg: $K_0 = 20.000$ $n = 4$

$p = 7$ $(q = 1{,}07)$

(1.) Berechnung des konstanten T-Betrages:

$$\boxed{T = \frac{K_0}{n}}$$

hier:

$$T = \frac{20000}{4} = \underline{\underline{5.000}}$$

(2) T-Plan

$\Downarrow$

Zugehöriger vollständiger Tilgungsplan:

Jahr	Restschuld	Zins auf Restschuld	Tilgung	Gesamt-zahlung
1	$20.000 \cdot \frac{7}{100}$	1400 (1) +	5.000	6.400 (2)
2	15.000 (3)	1.050	5.000	6.050
3	10000	700	5.000	5.700
4	$\boxed{5.000}$	350	$\boxed{5.000}$	5.350

=

neue RS = alte RS – alt. Tilgung !!!

Aufgabe 12
€ 20 000,– sind bei einem Zinssatz von 7% p. a. in vier Jahren zu tilgen.

2. Löse bei (~~konstanten~~) Annuitäten

Geg.: $K_0 = 20.000$ $\quad n = 4$

$p = 7$ $\quad q = 1,07$

1. Berechnung der Annuität A

$$A = \frac{K_0 q^n}{\frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

hier:

$$A = \frac{20000 \cdot 1,07^4}{\frac{1,07^4 - 1}{1,07 - 1}} = \underline{\underline{5.904,56}}$$

Weiter 19:45 Uhr

Zugehöriger vollständiger Tilgungsplan:

Jahr	Restschuld	Zins auf Restschuld	Tilgung	Gesamt-zahlung Annuität
1	$20.000 \cdot \frac{7}{100}$	1.400 (1)	4.504,56 (2)	5.904,56
2	15.495,44 (3)	1084,68	4.819,88	5.904,56
3	10.675,56	749,29	5.157,27	5.904,56
4	5.518,29	386,28	5.518,28	5.904,56

=

(2): $T_1 = A - Z_1$

$T_1 = 5.904,56 - 1.400 = \underline{4.504,56}$

(3) neue RS

$20000 - 4.504,56 = \underline{\underline{15.495,44}}$

usw.

Bei der Tilgung zu Annuitäten bilden die Tilgungsbeträge eine geometrische Folge (weil immer mit q multipliziert wird), und es gilt:

$$\boxed{T_{n^*} = T_1 \, q^{n^*-1}}$$

$$\underline{\underline{T_4}} = T_1 \, q^{4-1} = \underline{\underline{T_1 \, q^3}}$$

Mindform

Aufgabe 12
neue Abwandlung
€ 20 000,– sind bei einem Zinssatz von 7% p. a. in sechs Jahren zu tilgen, wobei die ersten beiden Jahre tilgungsfrei bleiben sollen.

Löse bei konstanten Tilgungsbeträgen…

tilgungsfreie Jahre

↳ schonen die Liquidität des Kreditnehmers

↳ Zinsen werden stets gezahlt

ges: $K_0 = 20000$ $p = 7$ $(q = 1{,}07)$

$n = 6$

davon: $n_1 = 2$ tilgungsfrei

davon: $n_2 = n - n_1$
$= 6 - 2 = 4$
mit Tilgung

1.) T berechnen

$$T = \frac{K_0}{n_2} = \frac{20000}{4} = \underline{\underline{5.000}}$$

2.) T-plan berechnen

Zugehöriger vollständiger Tilgungsplan:

Jahr	Restschuld	Zins auf Restschuld	Tilgung	Gesamt-zahlung
1	$20.000 \cdot \frac{7}{100}$	1400	–	1.400
2	20.000	1.400	–	1.400
3	20.000	1.400	5.000	6.400
4	15.000	1.050	5.000	6.050
5	10.000	700	5.000	5.700
6	$\boxed{5.000}$	350	$\boxed{5.000}$	5.350

=

Zusatzaufgaben Finanzmathematik

ges.: $K_0 = 10.000.000$

$n = 40$

$p = 11$

$$\boxed{q = 1 + \frac{p}{100}}$$

$q = 1{,}11$

Aufgabe 5

Tilgung zu ~~konstanten~~ Annuitäten
Kreditbetrag: € 10.000.000,--
Laufzeit: 40 Jahre
Zinsfuß: 11% p. a.

1. Berechnen Sie den Tilgungsbetrag des 32. Jahres T_{32}!
2. Berechnen Sie den Zinsbetrag des 20. Jahres Z_{20}!
3. Restschuld nach 35 Jahren K_{35}! ~~Geben Sie mindestens zwei Lösungswege an!~~

HA

K

bei Annuitäten: $\boxed{T_{n^*} = T_1 \, q^{n^*-1}}$

1)

1. Annuität A berechnen

$$A = \frac{K_0 \, q^n}{\frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

$$A = \frac{10000000 \cdot 1{,}11^{40}}{\frac{1{,}11^{40} - 1}{1{,}11 - 1}} = 1.117.187{,}27$$

2. Z_1 berechnen

$$Z_1 = K_0 \cdot \frac{p}{100}$$

$$Z_1 = 10.000.000 \cdot \frac{11}{100} = \underline{\underline{1.100.000}}$$

3. T_1 berechnen

$$T_1 = A - Z_1$$

$$T_1 = 1.117.187{,}27$$

$$- 1.100.000$$

$$= \underline{\underline{17.187{,}27}}$$

4. T_{32} berechnen

$$T_{n^*} = T_1 \cdot q^{n^* - 1}$$

$$T_{32} = T_1 \, q^{31}$$

$$T_{32} = 17.187{,}27 \cdot 1{,}11^{31}$$

$$= \underline{\underline{436.736{,}25}}$$

Die Tilgung im Jahr 32 beträgt € <u>436.736,25</u>

Eine schöne Adventszeit

09.12.

2.) Z_{20} ?

$$Z_{20} = A - T_{20} \rightarrow \text{Spezialformel}$$

$$Z_{20} = A - T_1 \cdot q^{19}$$

$$Z_{20} = 1.117.187{,}27 - 17.187{,}27 \cdot 1{,}11^{19} =$$

$$\underline{\underline{992.350{,}22}}$$

Die Zinslast im 20. Jahr beträgt

€ 992.350,22 ...

3.) ges.: K_{35} Restschuld nach 35 Jahren

Allg. nachschüssige Formel:

$$K_n = K_0 q^n + k \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

<u>ges.:</u> K_{35}

<u>geg.:</u> $K_0 = 10.000.000$ $q = 1,11$ $p = 11$

$n = 35$ nachschüssig

$k = -1.117.187,27$

Lös.: $K_{35} = 10.000.000 \cdot 1,11^{35} - 1.117.187,27 \dfrac{1,11^{35} - 1}{1,11 - 1} =$

$\underline{\underline{4.129.008,09}}$

Nach 35 Jahren haben wir immer noch eine Restschuld i.H.v.

€ 4.129.008,09.

Rentenrechnung spezial

Projektaufgaben

Aufgabe 5) **Ewige Rente**

a) A räumt dem B ein Wegerecht auf alle Zeiten ein. B muss dafür dem A auf unbegrenzte Zeit am Ende eines jeden Jahres € 1 000,– zahlen. Wie groß ist der Barwert der ewigen Rente, wenn beiden einen Zinssatz von p = 8 % p. a. zugrunde legen? Mit anderen Worten: Wie hoch ist der Betrag, durch dessen Zahlung der B seine Zahlungsverpflichtung sofort in voller Höhe abdecken könnte?

b) Welchen Betrag muss ein Kapital haben, wenn eine

   a) am Anfang
   b) am Ende

   eines jeden Jahres zahlbare ewige Rente in Höhe von € 100 000,– sichergestellt werden soll? Rechnen Sie mit einem Zinsfuß von 4,5% p. a.

Aufgabe 6) **Unterjährige Rentenzahlungen bei jährlicher Verzinsung**

a) Eine vorschüssige monatliche Rente beträgt € 2 000,– . Die jährliche Verzinsung liegt bei 6% und die Rentendauer beträgt 10 Jahre. Wie hoch ist der Rentenendwert?

b) Welcher Rentenendwert ergibt sich, wenn die monatliche Rente nachschüssig geleistet wird?

(Beispiel (erweitert) entstammt: HETTICH / JÜTTLER / LUDERER: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler und Finanzmathematik, 3. überarb. u. erw. Aufl., München, Wien 1996, S. 65.)

Zusatzaufgaben

Aufgabe 7

1. Eine vorschüssige quartalsweise Rente beträgt € 2 000,– . Die jährliche Verzinsung liegt bei 4% und die Rentendauer beträgt 8 Jahre. Wie hoch ist der Rentenendwert?
2. Welcher Rentenendwert ergibt sich, wenn die Rente halbjährlich, nachschüssig in Höhe von € 1.050,-- (bei gleicher Dauer und gleichem Zinsfuß) geleistet wird?

unterjährige Zahlungen bei jährlicher Verzinsung

Datenlage:

Formelinstrumentarium:

Projektaufgaben

Aufgabe 6) **Unterjährige Rentenzahlungen bei jährlicher Verzinsung**

a) Eine vorschüssige monatliche Rente beträgt € 2 000,– . Die jährliche Verzinsung liegt bei 6% und die Rentendauer beträgt 10 Jahre. Wie hoch ist der Rentenendwert?

b) Welcher Rentenendwert ergibt sich, wenn die monatliche Rente nachschüssig geleistet wird?

(Beispiel (erweitert) entstammt: HETTICH / JÜTTLER / LUDERER: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler und Finanzmathematik, 3. überarb. u. erw. Aufl., München, Wien 1996, S. 65.)

Zusatzaufgaben
Aufgabe 7

1. Eine vorschüssige quartalsweise Rente beträgt € 2 000,– . Die jährliche Verzinsung liegt bei 4% und die Rentendauer beträgt 8 Jahre. Wie hoch ist der Rentenendwert?
2. Welcher Rentenendwert ergibt sich, wenn die Rente halbjährlich, nachschüssig in Höhe von € 1.050,-- (bei gleicher Dauer und gleichem Zinsfuß) geleistet wird?

ewige Rente:

Datenlage:

Formelinstrumentarium:

Aufgabe 5) **Ewige Rente**

a) A räumt dem B ein Wegerecht auf alle Zeiten ein. B muss dafür dem A auf unbegrenzte Zeit am Ende eines jeden Jahres € 1 000,– zahlen. Wie groß ist der Barwert der ewigen Rente, wenn beiden einen Zinssatz von p = 8 % p. a. zugrunde legen? Mit anderen Worten: Wie hoch ist der Betrag, durch dessen Zahlung der B seine Zahlungsverpflichtung sofort in voller Höhe abdecken könnte?

b) Welchen Betrag muss ein Kapital haben, wenn eine

   a) am Anfang
   b) am Ende

   eines jeden Jahres zahlbare ewige Rente in Höhe von € 100 000,– sichergestellt werden soll? Rechnen Sie mit einem Zinsfuß von 4,5% p. a.

Platz für Notizen