

## Anmerkungen zur Finanzmathematik

- Übersicht über die verwendete Notation

$K_0$ :	Anfangswert, Startwert, Barwert
$K_n$ :	Zeitwert, Endwert
$n$ :	Verzinsungsdauer (zumeist in Jahren)
$p$ :	Zinsfuß
$q = 1 + \frac{p}{100}$ :	Aufzinsungsfaktor
$\frac{1}{q} = \frac{1}{1 + \frac{p}{100}}$ :	Abzinsungsfaktor
$k$ :	laufende Einzahlung ( $k > 0$ ), laufende Auszahlung ( $k < 0$ )
$m$ :	Anzahl der Perioden innerhalb einer Periode

**Notation:**

$K_0$ : Kapital am Beginn

Barwert  
auf den heutigen Zeitpunkt  
bezogene Wert

$K_m$ : Kapital nach  $m$  Perioden

Endwert, Zeitwert

$n$ : Anzahl der Perioden

$p$ : Zinssatz, Zinssatz ...

Bsp. 1:

5% p.a.

$p = 5$

für das Jahr

Per annum

pro Anno

Bsp. 2:  $2,25\%$  p.a.  $P = 2,25$

Bsp. 3:  $12\%$  p.a.  $P = 12$

$q = 1 + \frac{P}{100}$  Aufwinkungsfaktor

neues  
Kapital  $\hat{=}$  altes  
Kapital + Zinsen

$q = 1 + \frac{P}{100}$

Bsp. 1:  $P = 5 \Rightarrow q = 1,05$

Bsp. 2:  $P = 2,25 \Rightarrow q = 1,0225$

Bsp. 3:  $P = 12 \Rightarrow q = 1,12$

$$\frac{1}{1+r} = \frac{1}{1+\frac{r}{100}} : \text{Abzinsungsfaktor}$$

$$\frac{\dots}{1+r^n}$$

- für  $n$  Perioden  
kreditieren
- für  $n$  Perioden  
abzinsen

• diskontieren

$k$  : Erfolg Zahlung Pententechnung

$k \geq 0$  Einzahlung, Geldzufluss

$k < 0$  Auszahlung, Geldabfluss





$m$ : Anzahl der Perioden innerhalb eines Jahres (Rente speziell)

halbjährlich  $\Rightarrow m = 2$

vierteljährlich  $\Rightarrow m = 4$

monatlich  $\Rightarrow m = 12$

alle 4 Monate  $\Rightarrow m = 3$

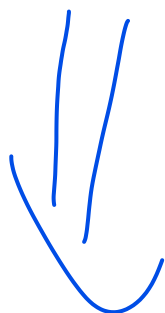
täglich  $\Rightarrow m = 360$

12 Monate  $\div$  30 Tage

stündlich  $\Rightarrow m = 8640$

$360 \cdot 24$

deutsche  
Methode



## Zinseszinsrechnung

### Modell:

- Zinsen werden periodenweise gezahlt,
- Zinsen werden am <sup>Ende</sup> der Periode zugerechnet.
- Die Verzinsungsdauer ist ein ganzzahliges Vielfaches der Zinsperiode,



Formeln:

# Deibniz-Formel

Linse's Linse Formel

Linse auf die Linse

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{P}{100}\right)^n$$

Index

Indizes

Exponent, Reihen  
größe

Ordnunggröße,  
keine Reihengröße

Beteiligte:  $K_n$ ;  $K_0$ ;  $(P:q)$ ;  
 $n$

Fang nach

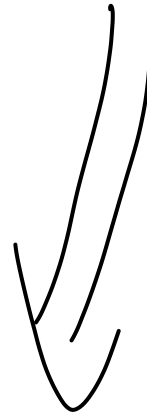
$$K_m \cdot q^m = K_m = K_0 q^m$$

$$K_0 = \frac{K_m}{q^m}$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{K_m}{K_0}\right)}{\ln(q)}$$

$$P = \left( \sqrt[m]{\frac{K_m}{K_0}} - 1 \right) \cdot 100$$

nicht unter der Wurzel



## **Aufgaben**

1. Herr Debeuk legte am 01.01.2020 € 800,- mit einem Zinssatz von 5% p. a. an. Über welchen Betrag kann er Ende 2024 verfügen?
2. Herr Debeuk überlegt, welchen Betrag er heute anlegen muss, um nach 10 Jahren bei einem Zinssatz von 6% p. a. € 2 000,- ausgezahlt zu bekommen?
3. Herr Debeuk bringt € 800.- zur Bank und erhält eine Verzinsung von 8% p. a.. Wie lange muss er das Geld anlegen, um mindestens € 1 100,- zu besitzen?
4. Paul hat vor sechs Jahren € 500.- zur Bank gebracht Heute hat er bei Zinseszinsen € 597,- auf seinem Konto. Wie hoch ist der Zinsfuß p?

## **Projektaufgaben**

### **Aufgabe 1) Unterschiedliche Zinssätze**

Ihre Bank bietet Ihnen folgenden Vertrag: Ihr Guthaben in Höhe von € 10 000,- wird im ersten Jahr mit 3,5%, im zweiten mit 4%, im dritten mit 5%, im vierten mit 6,5% und im fünften Jahr mit 7,5% verzinst.

- a) Auf welchen Betrag ist das Kapital am Ende des fünften Jahres angewachsen?
- b) Am Ende des vierten Jahres benötigen Sie € 27 962,94. Wie hoch muss dann Ihr Guthaben Ende der zweiten Periode mindestens sein?
- c) Berechnen Sie den durchschnittlichen Zinsfuß!

### Aufgabe 7) Gemischte Verzinsung

Am 25. Juni 2018 wurden € 1.000,-- zu einem Zinssatz von 2,5 % p. a. angelegt. Wie hoch ist der Auszahlungsbetrag bei Auflösung am 12. April 2033?

### Aufgabe 8) Gemischte Verzinsung

Am 24. Juli 2020 wurden € 3.000,-- zu einem Zinssatz von 5 % p. a. angelegt. Im Folgenden sollen Sie den Auszahlungsbetrag bei Auflösung am 18. April 2035 bestimmen!

1. Wie viele Tage werden für das Jahr 2020 berücksichtigt?  
**Geben Sie bitte die Anzahl der Tage an:**
2. Wie viele Tage werden für das Jahr 2035 berücksichtigt?  
**Geben Sie bitte die Anzahl der Tage an:**
3. Der Auszahlungsbetrag beträgt: **Bitte wählen Sie eine Antwort, kennzeichnen Sie am besten durch ein kleines x oder ein großes X.**
  - Der Auszahlungsbetrag lautet: € 6.158,67.
  - Der Auszahlungsbetrag lautet: € 6.160,36.
  - Der Auszahlungsbetrag lautet: € 6.159,52
  - Keiner der angegebenen Werte stimmt (Rundungsdifferenzen bis zu € 0,10 sind unerheblich.).

## Zusatzaufgaben Finanzmathematik

### Aufgabe 6

Ein Kapital in Höhe von € 10.000,-- werde im ersten Jahr mit 5%, im zweiten bis fünften Jahr mit 7,75%, im sechsten bis zehnten Jahr mit 10% und im elften bis 17. Jahr mit 12% verzinst.

1. Berechnen Sie  $K_{17}$  !
2. Berechnen Sie den durchschnittlichen Zinsfuß für den Zeitraum unter 1.!
3. Ende des 15. Jahres benötigen Sie € 80.000.--. Wie hoch muss dann Ihr Kapital Ende des vierten Jahres mindestens sein?
4. Berechnen Sie den durchschnittlichen Zinsfuß für den Zeitraum unter 3.!



$$K_n, K_0, (p, q), 3$$

### Aufgaben

1. Herr Debeuk legte am 01.01.2020 € 800,- mit einem Zinssatz von 5% p. a. an. Über welchen Betrag kann er Ende 2024 verfügen?

geg.:  $K_0 = 800$   $p = 5$   $q = 1,05$

$$n = 5$$

ges.:  $K_5$

Lös.:  $K_n = K_0 q^n$

$$K_{15} = 800 \cdot 1,05^5$$

$$= \underline{\underline{1.021,03}}$$

Schlusssatz  
notwendig:

Ende 2024 verfügt Herr D über

€ 1021,03.

• Tasten für  
Potenzieren  
 $x^y$   
 $x^a$   
^



$$K_n, K_0, (p, q), n$$

2. Herr Debeuk überlegt, welchen Betrag er heute anlegen muss, um nach 10 Jahren bei einem Zinssatz von 6% p. a. € 2 000,- ausgezahlt zu bekommen?

geg:  $n = 10$   $K_n = 2.000$

ges:  $K_0$   $p = 6$   $f = 1,06$

Lös:  $K_0 = \frac{K_n}{f^n}$

$$K_0 = \frac{2000}{1,06^{10}} = \underline{\underline{1.116,79}}$$

Marie Klammern!!!

Der D muss heute € 1.116,79

Anlegen.

Weiter  
19:45 Uhr



$$K_m, K_0, (p, q) ; \textcircled{7}$$

3. Herr Debeuk bringt € 800.- zur Bank und erhält eine Verzinsung von 8% p. a.. Wie lange muss er das Geld anlegen, um mindestens € 1 100,- zu besitzen?

Ge:  $K_0 = 800$     $p = 8$     $q = 1,08$

$$K_m = 1.100$$

Fr:

$m$

Lös:

$$m = \frac{\ln\left(\frac{K_m}{K_0}\right)}{\ln(q)}$$

$$\frac{\ln\left(\frac{1100}{800}\right)}{\ln(1,08)} =$$

$$m = \frac{\ln\left(\frac{1100}{800}\right)}{\ln(1,08)} = 4,1 \dots$$

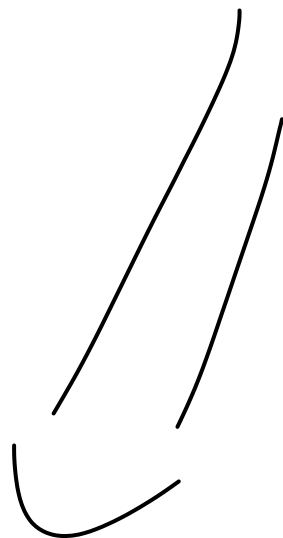
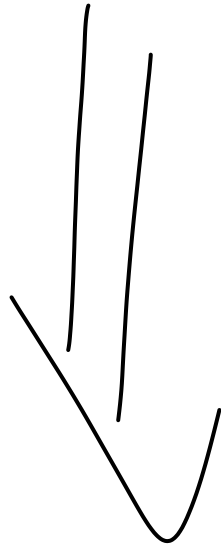
Es dauert 5 Jahre ..

immer zu  
nächsten ganzen  
Zahl aufrunden.

nach 4 Jahren:  $K_{4p} = 800 \cdot 1,08^4$

$$= \underline{\underline{1.088,39}}$$

$$\text{nach 5 Jahren } V_5 = 800 \cdot 1,08^5 \\ = \underline{\underline{1.175,46}}$$



$$K_n, K_0, (p, q), n$$

4. Paul hat vor sechs Jahren € 500,- zur Bank gebracht Heute hat er bei Zinseszinsen € 597,- auf seinem Konto. Wie hoch ist der Zinsfuß p?

ff:  $K_0 = 500 \quad n = 6 \quad K_6 = 597$

ff:  $p$

Los: 
$$p = \left( \sqrt[3]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 \right) \cdot 100$$

Steuerung nach rechts

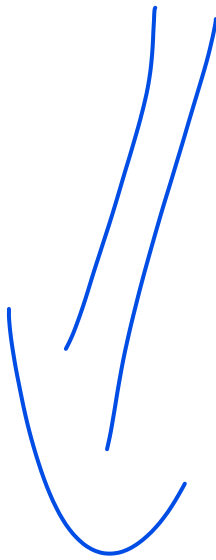
$$p = \left( \sqrt[6]{\frac{597}{500}} - 1 \right) \approx 3$$

nicht unter der Wurzel

Der Zinsfuß beträgt rund

3% p.a.

weil 5.35





## **Projektaufgaben**

### **Aufgabe 1) Unterschiedliche Zinssätze**

Ihre Bank bietet Ihnen folgenden Vertrag: Ihr Guthaben in Höhe von € 10 000,- wird im ersten Jahr mit 3,5%, im zweiten mit 4%, im dritten mit 5%, im vierten mit 6,5% und im fünften Jahr mit 7,5% verzinst.

- a) Auf welchen Betrag ist das Kapital am Ende des fünften Jahres angewachsen?
- b) Am Ende des vierten Jahres benötigen Sie € 27 962,94. Wie hoch muss dann Ihr Guthaben Ende der zweiten Periode mindestens sein?
- c) Berechnen Sie den durchschnittlichen Zinsfuß!













Aufgabe 7) **Gemischte Verzinsung**

Am 25. Juni 2018 wurden € 1.000,-- zu einem Zinssatz von 2,5 % p. a. angelegt. Wie hoch ist der Auszahlungsbetrag bei Auflösung am 12. April 2033?







**Aufgabe 8) Gemischte Verzinsung**

Am 24. Juli 2020 wurden € 3.000,-- zu einem Zinssatz von 5 % p. a. angelegt. Im Folgenden sollen Sie den Auszahlungsbetrag bei Auflösung am 18. April 2043 bestimmen!

1. Wie viele Tage werden für das Jahr 2020 berücksichtigt?

**Geben Sie bitte die Anzahl der Tage an:**

2. Wie viele Tage werden für das Jahr 2035 berücksichtigt?

**Geben Sie bitte die Anzahl der Tage an:**

3. Der Auszahlungsbetrag beträgt: **Bitte wählen Sie eine Antwort, kennzeichnen Sie am besten durch ein kleines x oder ein großes X.**

- Der Auszahlungsbetrag lautet: € 6.158,67.
- Der Auszahlungsbetrag lautet: € 6.160,36.
- Der Auszahlungsbetrag lautet: € 6.159,52
- Keiner der angegebenen Werte stimmt (Rundungsdifferenzen bis zu € 0,10 sind unerheblich.).







# Zusatzaufgaben Finanzmathematik

Leibniz period

## Aufgabe 6

Ein Kapital in Höhe von € 10.000,- werde im ersten Jahr mit 5%, im zweiten bis fünften Jahr mit 7,75%, im sechsten bis zehnten Jahr mit 10% und im elften bis 17. Jahr mit 12% verzinst.

- K!**
1. Berechnen Sie  $K_{17}$ !
  2. Berechnen Sie den durchschnittlichen Zinsfuß für den Zeitraum unter 1.!
  3. Ende des 15. Jahres benötigen Sie € 80.000.--. Wie hoch muss dann Ihr Kapital Ende des vierten Jahres mindestens sein?
  4. Berechnen Sie den durchschnittlichen Zinsfuß für den Zeitraum unter 3.!

$$K_n = K_0 q^n$$

für alle 17 Jahre  
für die Jahre 5 bis 15

$$= K_0 \cdot q \cdot q \cdot \dots \cdot q$$

1. Jahr 2. Jahr ... n-tes Jahr

das viele  
Jahr ist  
komplett  
ab geg.  
gelöst

$$K_0 = 10.000$$

$$p_1 = 5$$

$$q_1 = 1,05$$

$$n_1 = 1$$

$$p_2 = 7,75$$

$$q_2 = 1,0775$$

$$n_2 = 4$$

$$q = 1 + \frac{p}{100}$$

$$p_3 = 10$$

$$q_3 = 1,1$$

$$n_3 = 5$$

$$p_4 = 12$$

$$q_4 = 1,12$$

$$n_4 = 7$$

5  
10

ges:  $K_{17}$

Lös.:  $K_n = K_0 q_1^{n_1} \cdot q_2^{n_2} \cdot q_3^{n_3} \dots$

$$K_{17} = 10000 \cdot 1,05^1 \cdot 1,0775^4 \cdot 1,1^5 \cdot 1,12^7$$

$$= \underline{\underline{50.390,42}}$$

Noch 17 Jahren verfügen wir über

€ 50.390,42 //

- 2) Verwende die allg. Formel mit  $n$   
 (geometrisches Mittel verwenden)

$$p = \left( \sqrt[n]{\frac{\text{Endkapital}}{\text{Anfangskapital}}} - 1 \right) \cdot 100$$

$$n = 17 \quad \text{Endkapital} = 50.390,42$$

$$\text{Anfangskapital} = 10.000$$



$$P_D = \left( \sqrt[17]{\frac{50.390,42}{10.000}} - 1 \right) \cdot 100 \%$$

9,98

Der Ø Zinssatz beträgt

rd. 9,98%

hier für  
Nachk.



hier  
vorher!

19.11.2024

ff:

$$K_{15} = 80.000$$

\*

Was müssen wir tun?

ff:

$$K_4$$

Da ob zeitlich fri-  
here Wert gesucht ist,  
müssen wir ab Zinsen.

\* Welche Jahre sind für die Aufgabe relevant?

Jahre 5 bis 15

Wie viele Jahre sind es?

11 Jahre

Welche Zinsfüße gelten?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
									10							
5	7,75															

Formel:

$$K_{t_0} = \frac{K_{t_n}}{q^n}$$

Analog  
anwenden

Ges:  $K_{15} = 80000$

$$P_2 = 7,75$$

$$q_2 = 1,0775$$

$$n_2 = 1$$

$$P_3 = 10$$

$$q_3 = 1,1$$

$$n_3 = 5$$

$$P_4 = 12$$

$$q_4 = 1,12$$

$$n_4 = 5$$

$$K_4 = \frac{K_{15}}{q_2^{n_2} \cdot q_3^{n_3} \cdot q_4^{n_4}}$$

$$K_4 = \frac{80.000}{1,0775^1 \cdot 1,1^5 \cdot 1,12^5}$$

$$= \underline{\underline{26.158,88}}$$

Ende des 4. Jahres mindestens mind.

€ 26.158,88 vorhanden sein.

4.) allg. Formel nach  $p$  verwenden...

$$p = \left( \sqrt[n]{\frac{\text{Endkapital}}{\text{Anfangskapital}}} - 1 \right) \cdot 100$$

$n = 11$  (Jahre 5 bis 15)

Endkapital = 80000 ( $K_{15}$ )

Anfangskapital = 26.158,88 ( $K_4$ )

$$P = \left( \sqrt[11]{\frac{80000}{26.158,88}} - 1 \right) \cdot 100$$

$\approx \underline{\underline{10,7}}$



Der  $\phi$  Zinsfuß beträgt 10,7%.

10,7%.





**Platz für Notizen**







